REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Editorial
do Ministério
da Educação e Ciência

Preparação para Exames Nacionais

Matemática A

12.º Ano

Enunciados de 2013 a 2018
com resoluções completas e justificadas

APM
Associação de Professores
de Matemática

Edição
2019

ÍNDICE

Resoluções na pág. 237

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Probabilidades

Combinatória

1. Considere todos os números ímpares com cinco algarismos.

Quantos desses números têm quatro algarismos pares e são superiores a $20\,000$?

(A) 5^4

(B) 5^5

(C) 3×5^4

(D) 4×5^4

Triângulo de Pascal

2. Considere a linha do triângulo de Pascal em que a soma dos dois primeiros elementos com os dois últimos elementos é igual a 20

Escolhendo, ao acaso, um elemento dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser par?

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{2}{5}$

(C) $\frac{3}{5}$

(D) $\frac{4}{5}$

Funções

Limite segundo Heine

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $f(x)=\frac{x-1}{e^x-1}$

Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n=-\frac{1}{n}$

Qual é o valor de $\lim f(x_n)$?

(A) $-\infty$

(B) 0

(C) 1

(D) $+\infty$

Caderno 2 – não permitido usar calculadora

9.

Geometria

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 9.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 9.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

Programação linear

9.1. Num dado problema de Programação Linear, pretende-se determinar o valor máximo que a função objetivo, definida por $L = 3x + 5y$, pode alcançar.

Sabe-se que a região admissível é definida pelo seguinte sistema.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 10 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

Qual é esse valor máximo?

(A) 56 **(B)** 50 **(C)** 40 **(D)** 36

PMC2015

Elipse

9.2. Considere, num referencial o.n. xOy, uma elipse centrada na origem do referencial e de focos F_1 e F_2 pertencentes ao eixo Ox

Sabe-se que:

- $\overline{F_1F_2} = 12$
- sendo P um ponto qualquer da elipse, tem-se $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 20$

Qual é a equação reduzida desta elipse?

(A) $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{100} = 1$ **(B)** $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$

(C) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ **(D)** $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{100} = 1$

Enunciado na pág. 61

GRUPO I

1.

Considerando todos os números ímpares de 5 algarismos, pretendemos saber quantos desses números têm 4 algarismos pares e são superiores a 20 000. Para o algarismo das unidades existem cinco possibilidades, tantas quantos os números ímpares $\{1, 3, 5, 7, 9\}$; os restantes algarismos poderão tomar qualquer valor do conjunto $\{0, 2, 4, 6, 8\}$, à exceção do algarismo das dezenas de milhar, que não pode ser zero. Assim, existem 4×5^4 números nas condições dadas.

Resposta correta: (**D**)

2.

Sabemos que a linha n do triângulo de Pascal, com $n > 2$, tem $n + 1$ elementos. Analisando o triângulo de Pascal, verifica-se que, em cada linha, o primeiro e o último elementos são iguais a 1 e o segundo e o penúltimo elementos iguais a n, pelo que, de acordo com o enunciado, tem-se:

$1 + 1 + n + n = 20 \Leftrightarrow 2n = 18 \Leftrightarrow n = 9$

Trata-se da linha do triângulo de Pascal constituída pelos elementos da forma ${}^9C_p$, com $p \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, isto é:

$$1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1$$

Dos dez números desta linha, existem seis que são números pares, pelo que 10 é o número de casos possíveis e 6 o número de casos favoráveis, num espaço de resultados em que os acontecimentos elementares são equiprováveis. Assim, pela lei de Laplace, a probabilidade pedida é dada por:

$P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

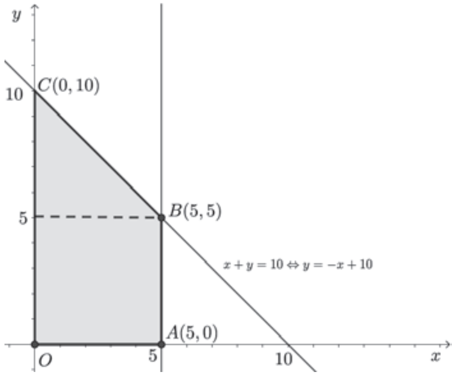
Resposta correta: (**C**)

Caderno 2 – não permitido usar calculadora

9.

9. 1. P2001/2002

Comecemos por representar a região D, região admissível deste problema de Programação Linear:



Fazendo $x=0$ na equação $x+y=10$, vem que $y=10$, pelo que a reta de equação $x+y=10$ intersecta o eixo Oy no ponto $C(0,10)$, e fazendo $x=5$ na equação $x+y=10$, temos $y=5$, pelo que as retas de equações $x+y=10$ e $x=5$ se intersectam no ponto $B(5,5)$.

Finalmente, para $L=0$, tem-se que $0=3x+5y \Leftrightarrow y=-\frac{3}{5}x$, pelo que a reta de equação $y=-\frac{3}{5}x$ (reta de nível 0) não é paralela a nenhum dos lados do polígono $[OABC]$ e portanto a solução óptima deste problema é atingida num dos seus vértices (pretende-se maximizar a função objetivo).

Assim, calculando o valor da função objetivo para cada um dos vértices considerados, temos:

Vértice	$L=3x+5y$
$A(5,0)$	$L=3\times5+5\times0=15$
$B(5,5)$	$L=3\times5+5\times5=40$
$C(0,10)$	$L=3\times0+5\times10=50$

Portanto, o valor máximo que a função objectivo alcança na região admissível dada pelo sistema é 50.

Resposta correta: (**B**)

Caderno 1 – permitido usar calculadora

1.

1.1. $\boxed{\text{P2001/2002}}$

Como A e B são acontecimentos equiprováveis, temos que $P(A)=P(B)$, e como A e B são acontecimentos independentes, temos:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=P(A)\times P(A)=P(A)^2$$

Logo, como sabemos que:

$$P(A\cup B)=0{,}64 \quad \text{e} \quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

vem:

$$0{,}64=P(A)+P(A)-(P(A))^2 \Leftrightarrow (P(A))^2-2P(A)+0{,}64=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A)=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times0{,}64}}{2\times1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A)=0{,}4 \vee P(A)=1{,}6$$

Como $P(A)\leq 1$, então $P(A)=0{,}4$

Resposta correta: (**B**).

1.2. $\boxed{\text{PMC2015}}$

Escrevendo a expressão na forma $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, em que A é a amplitude do oscilador harmónico, vem:

$$x(t)=\operatorname{sen}(\pi t)+\cos(\pi t) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}(\pi t)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\pi t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x(t)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}(\pi t)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(\pi t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x(t)=\cos\left(\pi t-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(t)=\frac{2}{\sqrt{2}}\cos\left(\pi t-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(t)=\sqrt{2}\cos\left(\pi t-\frac{\pi}{4}\right)$$

Assim, a amplitude A do oscilador harmónico é $\sqrt{2}$.

Resposta correta: (**B**)

Este livro contém os enunciados integrais dos Exames Nacionais da disciplina de Matemática A do 12.º ano aplicados a todo o sistema de ensino pelo Ministério da Educação nos anos de 2013 a 2018 (1.as Fases, 2.as Fases e Épocas Especiais).

São apresentadas propostas de resolução completas e justificadas para todos os itens, incluindo os itens de seleção (escolha múltipla).

Ao lado de cada item, tanto nos enunciados como nas resoluções, existe uma **coluna com indicações que identificam a matéria abordada, permitindo ao aluno orientar e direcionar o seu estudo** para as áreas do programa que mais lhe interessam.

Inclui ainda uma **tabela de agrupamento dos itens** em função dos temas programáticos e o **formulário** do programa.

As propostas de resolução apresentadas foram elaboradas por uma equipa de professores da **Associação de Professores de Matemática.**

www.emec.gov.pt

9 789727 670369

N.º catálogo 5514